

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	10
-----------------------	----

### Глава I

#### Приближенное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

§ 1. Аналитические методы . . . . .	14
1. Разложение решения в ряд Тейлора . . . . .	14
2. Метод последовательных приближений . . . . .	19
3. Метод Чаплыгина . . . . .	22
4. Метод Ньютона—Канторовича . . . . .	27
5. Метод малого параметра . . . . .	31
6. Оценка погрешности через невязку . . . . .	34
§ 2. Численные методы . . . . .	34
1. Метод Эйлера . . . . .	35
2. Метод трапеций . . . . .	35
3. Метод Рунге—Кутта . . . . .	36
4. Разностные методы. Экстраполяционная формула Адамса . . . . .	41
5. Интерполяционная формула Адамса . . . . .	47
6. Другие разностные методы . . . . .	50
7. Разностные методы для систем и для уравнений высших порядков . . . . .	54
8. Построение начала таблицы . . . . .	57
9. Об устойчивости разностных методов . . . . .	64
10. Погрешность формул Адамса . . . . .	66
11. Сравнение численных методов . . . . .	68
Некоторые литературные указания . . . . .	69

### Глава II

#### Метод сеток

§ 1. Уравнения эллиптического типа . . . . .	70
1. Сеточные уравнения . . . . .	70
2. Аппроксимация точной задачи сеточной . . . . .	79
3. Вопросы разрешимости, сходимости и оценки погрешности . . . . .	92
4. Сходимость и оценка погрешности для задачи Дирихле . . . . .	109

5. Итерационные способы решения сеточной задачи Дирихле	113
6. Численные примеры	118
7. Сеточная задача Неймана	126
8. Задача о собственных значениях эллиптического оператора	136
§ 2. Уравнения гиперболического и параболического типов	143
1. Задача Коши. Выбор решетки и сходимость сеточных решений	143
2. Смешанная задача. Явные и неявные схемы	150
3. Устойчивость разностной схемы. Признаки устойчивости	156
4. Примеры устойчивых разностных схем	172
§ 3. Нелинейные задачи	175
1. Квазилинейные гиперболические системы	175
2. Параболическое уравнение; задача с подвижной границей (модифицированная однослойная задача Стефана)	181
3. Задача Дирихле для слабо нелинейного эллиптического уравнения	183
Некоторые литературные указания	187

### Глава III

#### Вариационные методы

§ 1. Положительные операторы и энергия	188
1. Оператор краевой задачи	188
2. Положительные и положительно определенные операторы	189
3. Энергетическое пространство	191
4. Обобщенные производные	193
5. Теоремы вложения	196
§ 2. Энергетический метод	199
1. Функционал энергетического метода	199
2. Построение решения вариационной задачи	200
3. Метод Ритца	202
4. Методы решения системы Ритца	203
5. Естественные краевые условия	206
6. Неоднородные краевые условия	208
7. Энергетический метод в случае положительного оператора	210
§ 3. Приложения к задачам математической физики	211
1. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка	211
2. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков	215
3. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений	218
4. Основные задачи для уравнений эллиптического типа. Уравнения Лапласа и Пуассона	221

5. Вырождающиеся эллиптические уравнения . . . . .	227
6. Уравнения высших порядков . . . . .	228
7. Изгиб пластин . . . . .	230
8. Изгиб сжатой пластины . . . . .	233
9. Принцип минимума потенциальной энергии в статической теории упругости . . . . .	234
10. Краевые задачи для бесконечных областей . . . . .	241
§ 4. Проблема собственных чисел . . . . .	243
1. Основные понятия и теоремы . . . . .	243
2. Метод Релея—Ритца . . . . .	246
3. Уравнения вида $Au - \lambda Bv = 0$ . . . . .	248
4. Спектр обыкновенного дифференциального оператора . . . . .	250
5. Спектр эллиптического оператора . . . . .	253
6. Устойчивость сжатой пластины . . . . .	258
7. Спектр вырождающегося эллиптического уравнения . . . . .	258
8. Собственные колебания упругих тел . . . . .	259
9. Более общие условия положительной определенности дифференциальных операторов . . . . .	262
10. Минимаксимальный принцип . . . . .	263
§ 5. Другие вариационные методы и оценка погрешности . . . . .	264
1. Оценка погрешности приближенного решения . . . . .	264
2. Метод ортогональных проекций . . . . .	266
3. Приложения к частным задачам . . . . .	268
4. Метод Трэфтца . . . . .	271
5. Двусторонние оценки функционалов . . . . .	278
6. Двусторонние оценки собственных чисел . . . . .	279
7. Ошибка в решении, проистекающая от ошибки в уравнении . . . . .	282
§ 6. Метод наименьших квадратов . . . . .	283
1. Общие замечания . . . . .	283
2. Связь с энергетическим методом . . . . .	285
3. Применение к задачам теории потенциала на плоскости . . . . .	286
4. Применение к плоской задаче теории упругости . . . . .	289
§ 7. Об устойчивости метода Ритца . . . . .	290
1. Общие замечания . . . . .	290
2. Минимальные и сильно минимальные системы . . . . .	291
3. Предельные свойства коэффициентов Ритца . . . . .	293
4. Устойчивость метода Ритца . . . . .	294
5. О числе обусловленности матрицы Ритца . . . . .	299
6. Сходимость невязки к нулю . . . . .	299
§ 8. Подбор координатных функций . . . . .	300
1. Построение полной координатной системы . . . . .	300
2. Требования к рациональному выбору координатной системы . . . . .	302
3. Одномерные краевые задачи . . . . .	303
4. Двумерные краевые задачи . . . . .	307

§ 9. Метод Бубнова—Галёркина . . . . .	314
1. Основы метода . . . . .	314
2. Достаточный признак сходимости . . . . .	315
3. Применение к задачам математической физики . . . . .	315
4. Видоизменение метода в случае естественных краевых условий . . . . .	316
5. Обобщение метода Бубнова—Галёркина (проекционный метод) . . . . .	317
§ 10. Вариационные методы в некоторых нелинейных задачах	319
1. Общие теоремы . . . . .	319
2. Метод Ритца . . . . .	320
3. Нелинейная теория пологих оболочек . . . . .	322
4. Функционалы теории пластичности и их обобщение . . . . .	323
5. Решение нелинейных систем Ритца. Метод Качанова . . . . .	324
6. Сведение к задаче Коши . . . . .	326
§ 11. Метод прямых . . . . .	329
1. Основы метода . . . . .	329
2. Метод прямых для уравнений Лапласа и Пуассона . . . . .	331
3. Бигармоническое уравнение . . . . .	333
4. Метод прямых для параболического уравнения . . . . .	334
Некоторые литературные указания . . . . .	335

## Глава IV

### Приближенное решение интегральных уравнений

§ 1. Приближенное вычисление характеристических чисел и собственных функций симметричного ядра . . . . .	337
1. Общие замечания . . . . .	337
2. Метод Ритца . . . . .	340
3. Метод моментов . . . . .	343
4. Метод Келлога . . . . .	344
5. Метод следов . . . . .	346
6. Замена ядра вырожденным . . . . .	348
7. Применение определителя Фредгольма . . . . .	349
§ 2. Метод итераций . . . . .	349
1. Простая итерация . . . . .	349
2. Условия сходимости . . . . .	350
3. Видоизменения метода итераций . . . . .	352
4. Интегральное уравнение первого рода с симметричным ядром . . . . .	354
§ 3. Применение квадратурных формул . . . . .	354
1. Уравнения Вольтерра второго рода . . . . .	354
2. Уравнения Вольтерра первого рода . . . . .	355
3. Уравнения Фредгольма . . . . .	356

§ 4. Замена ядра вырожденным . . . . .	358
§ 5. Методы Бубнова—Галёркина и наименьших квадратов . .	364
1. Метод Бубнова—Галёркина . . . . .	364
2. Метод наименьших квадратов . . . . .	365
§ 6. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений . . . . .	367
1. Постановка задачи . . . . .	367
2. Решение сингулярного уравнения с вырожденным ядром	368
Некоторые литературные указания . . . . .	372
Библиография . . . . .	373
Алфавитный указатель . . . . .	380

---